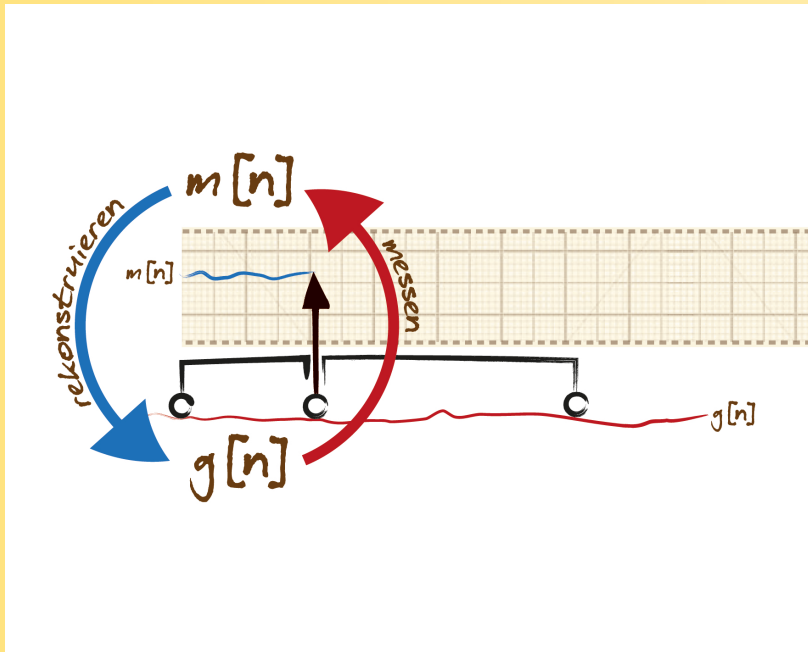


KLAUS ULRICH WOLTER



**Rekonstruktion der originalen Gleislageabweichungen aus 3-Punkt-Signalen (Wandersehenmessverfahren) und Beurteilung hinsichtlich Amplitude, Fehlerwellenlänge sowie Fehlerform**

# **WISSENSCHAFTLICHE ARBEITEN**

des Instituts für Land- und Seeverkehr der Technischen Universität Berlin

Nr. 4

## **Rekonstruktion der originalen Gleislageabweichungen aus 3-Punkt-Signalen (Wandersehenmessverfahren) und Beurteilung hinsichtlich Amplitude, Fehlerwellenlänge sowie Fehlerform**

von  
Dipl.-Ing. Univ. Klaus Ulrich Wolter  
aus Dorfen

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. med. habil. W. Friesdorf  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. J. Siegmann  
Gutachter: Dr.-Ing. G. Baumann

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 24. Mai 2012

Berlin 2012

D 83

**Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek:**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://www.d-nb.de> abrufbar.

**Titelbild:**

Grafische Gestaltung – IDEEN°weber – Franziska Weber – [franzi@ideenweber.com](mailto:franzi@ideenweber.com)

**Impressum:**

Wissenschaftliche Arbeit Nr. 4 des Instituts für Land- und Seeverkehr der Technischen Universität Berlin, Klaus Ulrich Wolter: „Rekonstruktion der originalen Gleislageabweichungen aus 3-Punkt-Signalen (Wandersehenmessverfahren) und Beurteilung hinsichtlich Amplitude, Fehlerwellenlänge sowie Fehlerform“, Dissertation

ISBN: 978-3-7771-0447-8

© 2012 bei DVV Media Group GmbH | Eurailpress, Nordkanalstraße 36, D-20097 Hamburg,  
Telefon: +49 (0) 40 237 14 - 03, Telefax: +49 (0) 40 237 14 - 236,  
E-Mail: [eurailpress@dvvmedia.com](mailto:eurailpress@dvvmedia.com)

Alle Rechte der Verbreitung und Wiedergabe vorbehalten, Übersetzungen in eine andere Sprache, Nachdruck und Vervielfältigung – in jeglicher Form und Technik, auch auszugsweise – nur mit schriftlicher Genehmigung des Verlages gestattet.

**Eine Publikation der DVV Media Group**



## Vorwort

Mit der Zunahme der Geschwindigkeit im Eisenbahnverkehr steigen auch die Anforderungen an die Gleislagequalität. Durch regelmäßige Inspektionen, als Bestandteil der Instandhaltung der Eisenbahninfrastruktur, werden die Abweichungen des Gleises von seiner idealen Lage regelmäßig geprüft. Häufig werden hierfür Sehnennesssysteme verwendet. Diese Messsysteme zeichnen sich durch ihren einfachen Aufbau aus. Der wesentliche Nachteil besteht jedoch darin, dass die realen, formtreuen Gleislageabweichungen im Messschrieb verzerrt wiedergegeben werden. Für eine Beurteilung der Gleislagequalität entsprechend der europäischen Norm EN 13848 können diese Messsignale nicht verwendet werden. Die Verzerrung ist von der Sehnennlänge und -teilung abhängig, so dass Messergebnisse unterschiedlicher Messsysteme nicht miteinander verglichen werden können.

In seiner Dissertation zeigt Herr Dr. Klaus Ulrich Wolter eine Möglichkeit auf, wie Sehnennesssysteme den gestiegenen Anforderungen der Gleislageinspektion gerecht werden können, indem die Messsignale in die realen, formtreuen Gleislageabweichungen zurückgerechnet werden. Die Aufgabe wird mit Methoden gelöst, die in der Signalverarbeitung und der Nachrichtentechnik gebräuchlich sind. Die praktische Anwendung wurde hierbei stets berücksichtigt, so lässt sich die gewonnene Lösung direkt in die Messsysteme integrieren. Mit dieser Methode ist auch eine Optimierung der Konstruktion der Sehnennesssysteme möglich. Erstmals können die Gleislagequalität und die Beurteilungsmaßstäbe unterschiedlicher Eisenbahninfrastrukturunternehmen miteinander verglichen werden, da sich Messergebnisse unterschiedlicher Messsysteme direkt ineinander umrechnen lassen. Messsysteme und Regelwerke können unabhängig voneinander weiterentwickelt werden. Zusätzlich wird in dieser Arbeit eine Methode zur Beurteilung der Gleislagequalität hinsichtlich Fehleramplitude, Fehlerwellenlänge und Fehlerform aufgezeigt. Dies ist Voraussetzung für die Beurteilung der Gleislagequalität unter Berücksichtigung der Reaktionen der Eisenbahnfahrzeuge.

Berlin, im Oktober 2012

Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Siegmann

## Kurzfassung

Die regelmäßige Inspektion der Gleislagegeometrie ist wesentlicher Bestandteil der Instandhaltung der Eisenbahninfrastruktur. Häufig werden für diese Inspektionen Gleismessfahrzeuge eingesetzt, welche eine Wandersehne als Messverfahren verwenden. Dieses Messverfahren ist im Aufbau sehr einfach und kostengünstig zu realisieren [Eck 1999]. Der wesentliche Nachteil des Wandersehenmessverfahrens besteht darin, dass die reale, formtreue Gleislagegeometrie verzerrt wiedergegeben wird. Bei vielen Eisenbahninfrastrukturunternehmen werden die Wandersehenmesssignale für die Beurteilung der Gleislagegeometrie verwendet. Die Beurteilungsmaßstäbe sind auf das verwendete Messsystem abgestimmt. Dieses Verfahren ist als Stand der Technik anerkannt. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass die Messergebnisse unterschiedlicher Wandersehenmessverfahren nicht miteinander verglichen werden können, da die Verzerrung der realen, formtreuen Gleislagegeometrie stark von der verwendeten Länge der Wandersehne und der Sehnenteilung abhängt. Somit ist ein Vergleich der Gleislagequalität sowie der Beurteilungsmaßstäbe unterschiedlicher Eisenbahninfrastrukturunternehmen kaum möglich.

Für die Beurteilung der Gleislagegeometrie entsprechend der europäischen Norm EN 13848 müssen jedoch die realen, formtreuen Gleislagesignale verwendet werden. Wandersehenmesssignale müssen in die realen, formtreuen Gleislagesignale zurückgerechnet werden, wenn die Inspektionen mit einem, auf einer Wandersehne basierenden, Inspektionsverfahren durchgeführt werden. Ein Verfahren für diese Rückrechnung wird in der EN 13848 nicht angegeben. Vielfach werden für diese Rückrechnung Näherungsverfahren für einen eingeschränkten Wellenlängenbereich angewendet. Ein Verfahren, welches die Rückrechnung für den gesamten Fehlerwellenlängenbereich ermöglicht, wurde vom Autor dieser Arbeit entwickelt. Ausgehend von der systemtheoretischen Beschreibung des Wandersehenmessprinzips wird eine Methode zur Kompensation des Übertragungsverhaltens des Wandersehenmessverfahrens entwickelt. Die in dieser Arbeit ausführlich erläuterte Methode ermöglicht eine nahezu exakte Umrechnung der Wandersehenmesssignale in die reale, formtreue Gleislagegeometrie. Die Methode basiert auf Signalverarbeitungsverfahren, wie diese in der Nachrichten- und der Informationstechnik verwendet werden. Die Herangehensweise, wie in dieser Arbeit beschrieben, ermöglicht auch die Definition von Anforderungen an ein Wandersehenmessverfahren, die eine möglichst exakte Rückrechnung ermöglichen. Des Weiteren lassen sich mit dieser Herangehensweise auch Umrechnungsvorschriften für die direkte Transformation von Wandersehenmesssignalen unterschiedlicher Messsysteme ableiten. Dies wird in dieser Arbeit erläutert. Diese direkte Umrechnung ermöglicht den direkten Vergleich der Gleislagequalität unterschiedlicher Eisenbahninfrastrukturunternehmen sowie deren Beurteilungsmaßstäbe.

Für die Beurteilung der Gleislagegeometrie für Strecken mit einer Streckenhöchstgeschwindigkeit von mehr als 250 km/h müssen nach den Vorgaben der EN 13848 zusätzlich die Fehleramplituden im Wellenlängenbereich von 70 m bis 200 m beurteilt werden. Ab einem Wellenlängenbereich größer als 70 m überlagern sich langwellige Gleislageabweichungen mit der Trassierung. Eine Trennung der Gleislageabweichungen von der Trassierung mittels Filter ist nicht möglich. In dieser Arbeit wird ein Verfahren angegeben, welches die Trennung von langwelligen Gleislageabweichungen von der Trassierung ermöglicht. Zusammen mit der Rückrechnung und der Trassierungsanalyse können Wandersehenmessverfahren für die Inspektion der Gleislagegeometrie entsprechend der EN 13848 auch für Wellenlängen größer als 70 m verwendet werden.

Die Beurteilung der Gleislagegeometrie erfolgt derzeit ausschließlich anhand der Fehleramplitude. Bei der Beurteilung entsprechend der EN 13848 werden für unterschiedliche Wellenlängenbereiche unterschiedliche maximale Fehleramplituden angegeben. Wesentlichen Einfluss auf die Reaktion der Eisenbahnfahrzeuge hat neben der Fehleramplitude und der Fehlerwellenlänge auch die Form der Gleislageabweichung. Damit bei künftigen Gleislagebeurteilungsverfahren die Reaktionen der Eisenbahnfahrzeuge mit berücksichtigt werden können, müssen Gleislageabweichungen hinsichtlich ihrer Fehleramplitude, Fehlerwellenlänge und Fehlerform beschrieben und bewertet werden. Mit Hilfe der Wavelet-Transformation lassen sich Gleislageabweichungen entsprechend der obigen Anforderungen beschreiben. Für die bei der Wavelet-Transformation verwendeten Wavelet-Funktionen werden typische Fehlerformen von Gleislageabweichungen verwendet. Voraussetzung für diese Herangehensweise ist, dass die Fahrzeugreaktionen, hervorgerufen durch die Fehlerreferenzfunktionen, vergleichbar mit den Fahrzeugreaktionen realer, formtreuer Gleislageabweichungen sind. Die Prüfung dieser Voraussetzungen mittels Simulationsrechnungen bestätigte, dass Wavelets als Fehlerreferenzfunktionen verwendet werden können. Mit Hilfe von Simulationsrechnungen können für die Fehlerreferenzfunktionen Beurteilungsmaßstäbe für die maximale Fehleramplitude und die Fehlerwellenlänge in Abhängigkeit der Streckenhöchstgeschwindigkeit definiert werden.

## Abstract

Regular inspection of track geometry is a key element in railway infrastructure maintenance. Such inspections are frequently carried out by track measuring vehicles that employ the chord offset method of measuring track geometry parameters. The chord offset method is simple to set up and inexpensive to implement [Eck 1999]. The major disadvantage of the method is that it does not yield a true (i.e. undistorted) representation of the actual track geometry. Many infrastructure management companies use chord offset measurement signals to assess track geometry. However, the assessment criteria vary depending on the particular measuring system used. The chord offset method is currently recognised as best practice in the field. A further disadvantage of the method is that the results acquired using different chord offset measuring techniques cannot be compared with one another as the geometric distortion that each technique introduces depends strongly on the chosen length of the chord and how it is subdivided. It is therefore almost impossible to compare the track geometry data or track quality assessment criteria from different railway infrastructure management companies.

In order to assess track geometry in accordance with European standard EN 13848, signals must provide a faithful representation of the actual track geometry. If inspections based on the chord offset method are to be carried out, the signals generated by the chord offset method must be converted into signals that provide a true representation of the actual track geometry. However, the EN 13848 standard does not specify how such a transformation should be carried out. In many cases, the transformation is performed by applying approximate methods for a limited range of wavelengths. A method that permits the transformation to be performed for the full range of track geometry defect wavelengths has been developed by the author. Starting from a mathematical description of the chord offset method the author develops a method that compensates for the distortion introduced by the chord offset technique. The method, which is explained in detail in this work, is based on signal processing methodologies used in communications and IT engineering and enables the almost perfect transformation of the chord measurement signals back to the real shape of the track. The approach described in this work also enables the stipulation of criteria that a chord offset method should meet if signal conversion is to be performed as accurately as possible. A further advantage of the method described here is that rules can be derived for the direct transformation of chord offset signals from different measuring systems. This, too, is explained in detail in this thesis. Direct transformation enables the direct comparison of track quality assessment criteria and track quality data from different railway infrastructure management companies.

To assess track geometry on lines with a maximum permissible line speed above 250 km/h, the EN 13848 standard stipulates that the amplitudes of track geometry defects in the wavelength range 70 m to 200 m must also be taken into account. At wavelengths of more than 70 m, any long-wavelength anomalies in track geometry will be superimposed on the track layout. Filters cannot be used to separate the actual track anomalies from track layout effects. This thesis presents a method that enables long-wavelength defects in track geometry to be separated from such track layout effects. When combined with the transformation technique and the track layout analysis described in this thesis, the chord offset method can be used to inspect track geometry in accordance with EN 13848 even when the track defect wavelength exceeds 70 m.

At present, track geometry quality is assessed solely on the basis of the amplitude of track geometry anomalies. The EN 13848 standard requires assessment to be based on different maximum track defect amplitudes that are specified for the different wave-

length ranges. The dynamic response of a railway vehicle is affected not only by the amplitude and the wavelength of track irregularities, but also by their shape. If vehicle response data is to be included in future track geometry measurement procedures it will be necessary to describe and assess the amplitude, wavelength and shape of track geometry anomalies. The wavelet transformation technique provides a means of describing track geometry defects that meets these requirements. The wavelet functions used in the wavelet analysis are based on the typical shapes of track geometry defects. This approach assumes that the vehicle response characteristics generated by the track defect reference functions are comparable to the vehicle responses observed with real track geometry deviations. Simulations performed to check this assumption showed that wavelets can indeed be used as track geometry defect reference functions. Simulations can therefore be used to define assessment criteria for the reference functions in which the maximum amplitude and the wavelength of the track irregularities are expressed as a function of maximum line speed.



## Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	1
Kurzfassung .....	2
Abstract.....	4
Inhaltsverzeichnis.....	6
Verzeichnis der Abkürzungen.....	7
Verzeichnis der Abbildungen.....	8
Verzeichnis der Tabellen.....	11
Verzeichnis der Formeln.....	11
Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen .....	13
1 Einleitung.....	15
2 Ziel und Inhalt dieser Arbeit .....	17
3 Rekonstruktion der Wandersehne.....	19
3.1 Einleitung.....	19
3.2 Messprinzip.....	20
3.3 Impulsantwort und Übertragungsfunktion des Wandersehenmess- verfahrens.....	22
3.3.1 Impulsantwort und Übertragungsfunktion des Gleismesstriebzuges der Deutschen Bahn AG .....	23
3.3.2 Beispiele für Übertragungsfunktionen .....	28
3.4 Kompensation des Übertragungsverhaltens.....	31
3.4.1 Inverse Übertragungsfunktion – Aufgabenbeschreibung .....	32
3.4.2 Berechnung der Impulsantwort $h_c[n]$ und der Übertragungsfunktion $H_c(z)$ ....	33
3.5 Optimale Wahl für die Sehnenteilungen.....	46
3.5.1 Keine Nullstellen auf dem Einheitskreis .....	47
3.5.2 Berechnung von $H_{dmin}$ unabhängig von der Messrichtung .....	48
3.6 Umrechnung von Wandersehenmesssignalen .....	49
3.6.1 Berechnung der Systemfunktion $H_{1,2}(z)$ .....	51
3.6.2 Beispiele für die Umrechnung .....	53
3.6.2.1 Beispiel: Handmesssystem ‚Krabbe‘ .....	53
3.6.2.2 Beispiel: ‚New Dr. Yellow‘ .....	61
4 Trassierungsanalyse.....	66
4.1 Trennung der Gleislageabweichungen von der Trassierung .....	67
4.2 Bestimmung der Trassierung .....	68
4.3 Berechnung der Pfeilhöhen der idealen Gleislage (Trassierung).....	72

4.4	Trennung von langwelligen Gleislageabweichungen von der Trassierung – ein Beispiel .....	72
4.5	Prüfen der Ergebnisse .....	78
5	Beurteilung der formtreuen Gleislage mit Hilfe von Referenzfunktionen.....	80
5.1	Möglichkeiten der Beschreibung von Gleislageabweichungen .....	81
5.2	Definition von ‚Fehlerreferenzfunktionen‘ und Waveletfunktionen .....	84
5.3	Definition von Beurteilungsgrößen .....	87
6	Zusammenfassung .....	91
7	Ausblick .....	93
	Literaturverzeichnis .....	94
	Anhang.....	101
A.1	Programm zur Berechnung und Darstellung der Impulsantworten und der Übertragungsfunktionen.....	101
A.2	Programm zur Berechnung Filterkoeffizienten der Rekonstruktions- filter $h_c[n]$ .....	103
A.3	Programm zur Berechnung Filterkoeffizienten für die direkte Umrechnung der Wandersehenmesssignale.....	107

## Verzeichnis der Abkürzungen

EIU	Eisenbahninfrastrukturunternehmen
FIR-Filter	Filter mit endlicher Impulsantwort (engl.: finite impulse response filter)
GMTZ	Gleismesstriebzug der Deutschen Bahn AG
IIR-Filter	Filter mit unendlicher Impulsantwort (engl.: infinite impulse response filter)
LTI-System	lineares zeitinvariantes System (engl.: linear time-invariant system)
Q-Kräfte	Radaufstandskräfte in vertikaler Richtung; vertikale Rad-Schiene-Kräfte
RAILab®	Inspektionsfahrzeug für die Oberbauinspektion der Deutschen Bahn AG (RAILab® = Rollendes Analyse und Inspektions-Labor)

## Verzeichnis der Abbildungen

Abbildung 1:	Messung des Offsets $m$ mit einer Wandersehne .....	20
Abbildung 2:	Bestimmung des Messsignals $m(x)$ – Pfeilhöhe/Längshöhe .....	21
Abbildung 3:	LTI-System des Wandersehenmessverfahrens im Ortsbereich .....	22
Abbildung 4:	LTI-System des Wandersehenmessverfahrens im Frequenzbereich .....	22
Abbildung 5:	Ortsdiskretes LTI-System des Wandersehenmessverfahrens .....	23
Abbildung 6:	Diskretes LTI-System des Wandersehenmessverfahrens .....	23
Abbildung 7:	Impulsantwort $h(x)$ für eine Sehnenteilung 2,6 m / 6,0 m .....	25
Abbildung 8:	Impulsantwort $h(x)$ für eine Sehnenteilung 6,0 m / 2,6 m .....	26
Abbildung 9:	Betrag der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ für eine Sehnenteilung 2,6 m / 6,0 m .....	27
Abbildung 10:	Diskrete Impulsantwort $h_d[n]$ für $a = 13$ und $b = 30$ .....	28
Abbildung 11:	Betrag der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ für eine Sehnenteilung 4,0 m / 6,0 m .....	28
Abbildung 12:	Vergleich der Beträge der Übertragungsfunktionen - Längshöhen ....	29
Abbildung 13:	Vergleich der Beträge der Übertragungsfunktionen - Pfeilhöhen .....	30
Abbildung 14:	Vergleich der Messsignale – Längshöhen .....	30
Abbildung 15:	Vergleich der Messsignale – Pfeilhöhen .....	31
Abbildung 16:	Diskrete Impulsantwort $h_d[n]$ und LTI-System $h_d[n]$ zur Kompensation der Verzerrung .....	32
Abbildung 17:	Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion $H_d(z)$ in der komplexen $z$ -Ebene .....	35
Abbildung 18:	Spiegelung der konjugiert komplexen Nullstellen am Einheitskreis ....	37
Abbildung 19:	Pole und Nullstellen von $H_{dmin}(z)$ .....	38
Abbildung 20:	Pole und Nullstellen von $H_{ap}(z)$ .....	38
Abbildung 21:	Betrag der Übertragungsfunktion $H_{dmin}(z)$ .....	39
Abbildung 22:	Betrag der Übertragungsfunktion $H_{ap}(z)$ .....	39
Abbildung 23:	Pole und Nullstellen von $H_c(z)$ .....	40
Abbildung 24:	Betrag der Übertragungsfunktion $H_c(z)$ .....	41
Abbildung 25:	Kanonische Darstellung digitaler Filter .....	42
Abbildung 26:	Pole und Nullstellen von $H_d(z)$ für eine Sehnenteilung 4,0 m / 6,0 m .	43
Abbildung 27:	Betrag der Übertragungsfunktion von $H_d(z)$ für eine Sehnenteilung 4,0 m / 6,0 m .....	44

Abbildung 28:	Betrag der Übertragungsfunktion von $H_c(z)$ für eine Sehnenteilung 4,0 m / 6,0 m.....	45
Abbildung 29:	Betrag der Übertragungsfunktion von $H_c(z)$ für eine Sehnenteilung 4,0 m / 6,0 m.....	46
Abbildung 30:	Periodische Fehler, die nicht erfasst werden .....	47
Abbildung 31:	Umrechnung von Wandersehenmesssignalen .....	50
Abbildung 32:	Impulsantwort $h_{1,2}[n]$ .....	51
Abbildung 33:	Umrechnung von Wandersehenmesssignalen .....	51
Abbildung 34:	Handmesssystem ‚Krabbe‘ – Betrag der Übertragungsfunktion.....	53
Abbildung 35:	Handmesssystem ‚Krabbe‘ – Pole und Nullstellen.....	54
Abbildung 36:	Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ – Betrag der Übertragungsfunktion.....	54
Abbildung 37:	Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ – Pole und Nullstellen.....	55
Abbildung 38:	‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ – Pole und Nullstellen.....	55
Abbildung 39:	‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Längshöhe‘ – Betrag der Übertragungsfunktion .....	56
Abbildung 40:	$H_{d1}(z)$ , $H_{d2}(z)$ und $H_{1,2}(z)$ – Beträge der Übertragungsfunktionen .....	56
Abbildung 41:	Beispiel für die Umrechnung – Längshöhen .....	58
Abbildung 42:	Ril 821.2001 ‚Pfeilhöhe‘ – Betrag der Übertragungsfunktion.....	58
Abbildung 43:	Ril 821.2001 ‚Pfeilhöhen‘ – Pole und Nullstellen.....	59
Abbildung 44:	‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Pfeilhöhen‘ – Pole und Nullstellen .....	59
Abbildung 45:	‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Pfeilhöhen‘ – Betrag der Übertragungsfunktion .....	60
Abbildung 46:	$H_{d1}(z)$ , $H_{d2}(z)$ und $H_{1,2}(z)$ – Beträge der Übertragungsfunktionen .....	60
Abbildung 47:	Beispiel für die Umrechnung – Pfeilhöhen.....	61
Abbildung 48:	‚New Dr. Yellow‘ – Betrag der Übertragungsfunktion .....	62
Abbildung 49:	‚New Dr. Yellow‘ – Pole und Nullstellen.....	62
Abbildung 50:	‚Dr. Yellow‘ – Betrag der Übertragungsfunktion .....	63
Abbildung 51:	‚Dr. Yellow‘ – Pole und Nullstellen .....	63
Abbildung 52:	‚New Dr. Yellow‘ → ‚Dr. Yellow‘ – Pole und Nullstellen.....	64
Abbildung 53:	‚New Dr. Yellow‘ → ‚Dr. Yellow‘ – Betrag der Übertragungsfunktion...64	
Abbildung 54:	$H_{d1}(z)$ , $H_{d2}(z)$ und $H_{1,2}(z)$ – Beträge der Übertragungsfunktionen .....	65
Abbildung 55:	Beispiel für die Umrechnung – Längshöhen .....	65
Abbildung 56:	Rekonstruierte Pfeilhöhe und Einfluss der Trassierung .....	66
Abbildung 57:	Wellenlängenbereiche für Gleislageabweichungen und Trassierung ..67	
Abbildung 58:	Signalflussgraf für die Trennung von Gleislageabweichungen von der Trassierung .....	67

Abbildung 59: Trassierungselemente – Klothoide, S-förmiger Übergang und Übergang nach Bloss .....	70
Abbildung 60: Berechnung der Pfeilhöhen für die Trassierung.....	72
Abbildung 61: Überhöhungen und Krümmungen der Gleisgeometriemessung .....	73
Abbildung 62: Überhöhungen – Soll- und Isttrassierung .....	74
Abbildung 63: Krümmungen – Soll- und Isttrassierung.....	74
Abbildung 64: Krümmungen – Soll- und Isttrassierung (Detailansicht) .....	75
Abbildung 65: Gleislage im Raum.....	75
Abbildung 66: Pfeilhöhen für die Isttrassierung .....	76
Abbildung 67: Pfeilhöhen für die Isttrassierung (Detailansicht).....	76
Abbildung 68: Messsignal $m_a(x)$ der linken Schiene .....	77
Abbildung 69: Langwellige, formtreue Gleislageabweichungen.....	77
Abbildung 70: Signalfussgraf der Plausibilitätsprüfung .....	78
Abbildung 71: Plausibilitätstest.....	78
Abbildung 72: Plausibilitätstest.....	79
Abbildung 73: ‚Mexican Hat Wavelet‘ für unterschiedliche Parameter a und b .....	82
Abbildung 74: Gleislagesignal mit Waveletfunktion ‚mexh‘ .....	83
Abbildung 75: Ergebnis der Wavelettransformation.....	83
Abbildung 76: Gleislagesignal mit zugehöriger Waveletfunktion.....	84
Abbildung 77: Einzelfehler einer Gruppe mit typischem Vertreter.....	85
Abbildung 78: Einzelfehler einer Gruppe mit typischem Vertreter.....	86
Abbildung 79: Wavelet ‚db4‘ als Fehlerreferenzfunktion .....	86
Abbildung 80: Wavelet ‚gaus3‘ als Fehlerreferenzfunktion .....	87
Abbildung 81: Wavelets ‚db8‘, ‚db10‘ und ‚sym4‘ als Fehlerreferenzfunktionen .....	87
Abbildung 82: Vergleich der Q-Kräfte.....	88
Abbildung 83: Vergleich der vertikalen Wagenkastenbeschleunigungen.....	88
Abbildung 84: Q-Kräfte in Abhängigkeit der Fehleramplitude und Fehlerwellenlänge für die Fehlerreferenzfunktion ‚db4‘ .....	89
Abbildung 85: Q-Kräfte in Abhängigkeit der Fehleramplitude und Fehlerwellenlänge für die Fehlerreferenzfunktion ‚db4‘ .....	89
Abbildung 86: Reale Kombinationen von Fehleramplituden und Fehlerwellenlängen .....	90

## Verzeichnis der Tabellen

Tabelle 1:	Eisenbahninfrastruktur der Deutschen Bahn AG [DBAG_2 2009] .....	15
Tabelle 2:	Instandhaltung nach DIN 31051 .....	16
Tabelle 3:	Beurteilungsmaßstäbe nach Richtlinien 821.2001 ‚Prüfung der Gleisgeometrie mit Gleismessfahrzeugen‘ [Ril 821.2001] .....	16
Tabelle 4:	Messbasen und Sehnenteilungen bei der Deutschen Bahn AG .....	19
Tabelle 5:	Sehnenlängen und Sehnenteilungen bei der Deutschen Bahn AG .....	24
Tabelle 6:	Ergebnisse der Trassierungsanalyse für die Krümmungen .....	75
Tabelle 7:	Fehlerwellenlängenbereiche entsprechend der EN 13848 .....	80
Tabelle 8:	Kreuzkorrelationsmatrix der Einzelfehler (Auszug) .....	85

## Verzeichnis der Formeln

Formel 1:	Berechnung des Wandersehenmesssignals $m(x)$ .....	21
Formel 2:	Berechnung von $m(x)$ mittels der Impulsantwort $h(x)$ im Ortsbereich .....	22
Formel 3:	Berechnung von $M(j\omega)$ mittels der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ im Frequenzbereich .....	23
Formel 4:	Berechnung von $m[n]$ im diskreten Fall .....	23
Formel 5:	Berechnung von $M(z)$ mittels der Systemfunktion $H_d(z)$ .....	23
Formel 6:	Kontinuierliche Impulsantwort $h(x)$ des Wandersehenmessverfahrens .....	25
Formel 7:	Diskrete Impulsantwort $h_d[n]$ des Wandersehenmessverfahrens .....	25
Formel 8:	Kontinuierliche Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des Wandersehenmessverfahrens .....	25
Formel 9:	Betrag der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ .....	26
Formel 10:	Realteil von $H(j\omega)$ .....	26
Formel 11:	Imaginärteil von $H(j\omega)$ .....	26
Formel 12:	Quadrat des Imaginärteils von $H(j\omega)$ .....	27
Formel 13:	z-Transformation von $h_d[n]$ .....	33
Formel 14:	z-Transformationspaare für $h_d[n]$ .....	33
Formel 15:	Diskrete Übertragungsfunktion $H_d(z)$ .....	34
Formel 16:	Diskrete Übertragungsfunktion $H_d(z)$ als Bruch zweier Polynome .....	34
Formel 17:	Faktorisierung von $Z(z)$ und $N(z)$ .....	34
Formel 18:	Inverse Übertragungsfunktion $H_c(z)$ des minimalphasigen LTI-Systems $H_d(z)$ .....	34
Formel 19:	Aufteilung der Übertragungsfunktion $H_d(z)$ in zwei Übertragungs- funktionen $H_{dmin}(z)$ und $H_{ap}(z)$ .....	35

Formel 20:	Zähler- und Nennerpolynom von $H_d(z)$ .....	36
Formel 21:	Berechnung der Nullstellen von $H_d(z)$ .....	36
Formel 22:	Berechnung der Polstellen von $H_d(z)$ .....	36
Formel 23:	Faktorisierung des Zählerpolynoms $Z(z)$ von $H_d(z)$ .....	36
Formel 24:	Abbildungsvorschrift für Nullstellen außerhalb des Einheitskreises .....	36
Formel 25:	Betrag der Übertragungsfunktionen $H_d(z)$ und $H_{dmin}(z)$ .....	37
Formel 26:	Übertragungsfunktion $H_{dmin}(z)$ mit Zählerpolynom $Z'(z)$ .....	37
Formel 27:	Nullstelle für $z = 1$ .....	40
Formel 28:	Inverse Übertragungsfunktion $H_c(z)$ des minimalphasigen Systems.....	40
Formel 29:	Übertragungsfunktion $H_{ges}(z)$ des Wandersehenmessverfahrens und der Kompensation.....	42
Formel 30:	Darstellung der Übertragungsfunktion $H_c(z)$ .....	42
Formel 31:	Betrag der Übertragungsfunktion $H_d(z)$ für $z = 1$ .....	43
Formel 32:	Zusammenhang von Abtastrate und Abtastfrequenz.....	44
Formel 33:	Bedingung für keine Nullstellen auf dem Einheitskreis .....	47
Formel 34:	Berechnung der Impulsantwort $h_{1,2}[n]$ im diskreten Fall .....	51
Formel 35:	Berechnung des Wandersehenmesssignals $m_2[n]$ .....	51
Formel 36:	Berechnung der Systemfunktion $H_{1,2}(z)$ .....	51
Formel 37:	Allgemeine Darstellung der Systemfunktion $H_{1,2}(z)$ .....	52
Formel 38:	Systemfunktion $H_{1,2}(z)$ als Bruch zweier Polynome .....	52
Formel 39:	Grenzwert von $H_{1,2}(z)$ für $z \rightarrow 1$ .....	57
Formel 40:	Messsignal als Summe der Gleislageabweichung und der Trassierung .	67
Formel 41:	Gleislage als Summe von Gleislageabweichung und Trassierung .....	68
Formel 42:	Anteil Messsignal der Gleislageabweichungen .....	68
Formel 43:	Gerades Gleis – Krümmung als Funktion des Weges .....	69
Formel 44:	Klothoide – Krümmung als Funktion des Weges.....	69
Formel 45:	S-förmiger Übergang (1. Hälfte) – Krümmung als Funktion des Weges .	69
Formel 46:	S-förmiger Übergang (2. Hälfte) – Krümmung als Funktion des Weges .	69
Formel 47:	Übergang nach Bloss – Krümmung als Funktion des Weges.....	69
Formel 48:	Bogen – Krümmung als Funktion des Weges .....	69
Formel 49:	Berechnung der Tangentenwinkel aus dem Krümmungsverlauf.....	70
Formel 50:	Gerades Gleis – Tangentenwinkel .....	70
Formel 51:	Klothoide – Tangentenwinkel .....	70
Formel 52:	S-förmiger Übergang (1. Hälfte) – Tangentenwinkel .....	70
Formel 53:	S-förmiger Übergang (2. Hälfte) – Tangentenwinkel .....	71
Formel 54:	Übergang nach Bloss – Tangentenwinkel .....	71

Formel 55: Bogen – Tangentenwinkel .....	71
Formel 56: Berechnung der x- und y-Koordinaten im Raum .....	71
Formel 57: Gerades Gleis – x- und y-Koordinaten im Raum .....	71
Formel 58: Bogen – x- und y-Koordinaten im Raum .....	71
Formel 59: Definition der Wavelettransformation .....	81
Formel 60: Definition ‚Mexican Hat Wavelet‘ .....	81
Formel 61: Definition ‚Mexican Hat Wavelet‘ für $t \rightarrow (t-b)/a$ .....	82

## Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

$m(x)$	Messsignal des Wandersehenmesssystems
$m_a(x)$	Messsignal des Wandersehenmesssystems – Anteil Gleislageabweichungen
$m_t(x)$	Messsignal des Wandersehenmesssystems – Anteil Trassierung
$h(x)$	Kontinuierliche Impulsantwort des Messsystems
$h_{inv}(x)$	Inverse Übertragungsfunktion des Messsystems
$g(x)$	originales Signal; reale, formtreue Gleislage
$t(x)$	Trassierung
$\hat{g}(x)$	rekonstruiertes Signal
$m[n]$	Messsignal im diskreten System
$h[n]$	Impulsantwort des Messsystems im diskreten System
$h_d[n]$	Impulsantwort des Messsystems im diskreten System
$h_c[n]$	inverse Impulsantwort des Messsystems im diskreten System
$g[n]$	originales Signal im diskreten System
$\hat{g}[n]$	rekonstruiertes Signal im diskreten System
$M(j\omega)$	Fouriertransformierte von $m(x)$
$H(j\omega)$	Fouriertransformierte von $h(x)$ , Übertragungsfunktion
$G(j\omega)$	Fouriertransformierte von $g(x)$
$M(z)$	z-Transformierte von $m[n]$
$H(z)$	z-Transformierte von $h[n]$ , Systemfunktion
$H_d(z)$	z-Transformierte von $h_d[n]$ , Systemfunktion
$H_c(z)$	z-Transformierte von $h_c[n]$ , Systemfunktion
$G(z)$	z-Transformierte von $g[n]$
$x$	Ort
$j$	imaginäre Einheit
$\omega$	Kreisfrequenz
$\delta(x)$	Dirac-Funktion
$a, b$	Parameter der Sehnenteilung; Filterkoeffizienten für digitale Filter bei Wavelettransformation: $a \rightarrow \text{scale}$ , $b \rightarrow \text{space}$



$n$	Abtastwert
$\Delta x, dx$	Abtastrate
$z$	Ort der komplexen $z$ -Ebene, komplexe Zahl
$z^*$	konjugiert komplexe von $z$
$d$	Index des Ortsdiskreten Systems
$Z(z)$	Zählerpolynom
$N(z)$	Nennerpolynom
$H_c(z)$	Systemfunktion des Kompensationsfilters
$H_{\min}(z)$	minimalphasige Systemfunktion zu $H_d(z)$
$H_{\text{ap}}(z)$	Allpass-Systemfunktion
$N_x$	Nullstelle
$H_{\text{ges}}(z)$	Systemfunktion des gesamten Systems
$x$	Weg entlang der Gleisachse
$\lambda(x)$	Wellenlängen der Gleislageabweichungen und der Trassierung
$\tau(x)$	Tangentenwinkel in Abhängigkeit des Weges
$kr(x)$	Krümmung in Abhängigkeit des Weges
$kr_a$	Krümmung am Anfang des Krümmungsüberganges
$kr_e$	Krümmung am Ende des Krümmungsüberganges
$l_{kr}$	Länge des Krümmungsüberganges
$x_{\text{Koord}}$	x-Koordinate im Raum
$y_{\text{Koord}}$	y-Koordinate im Raum
$\Psi$	Waveletfunktion
$C(a,b)$	Waveletkoeffizienten in Abhängigkeit von $a$ (scale) und $b$ (space)

$$g^*[n] \approx g[n]$$

ergeben. Es wird sich zeigen, dass diese Näherung für die praktische Anwendung keinerlei negative Auswirkung hat.

Ausgehend von Formel 5 kann das z-transformierte Signal  $G^*(z)$  wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} M(z) &= H_d(z) \cdot G(z) \\ G^*(z) &= H_c(z) \cdot M(z) \\ \Rightarrow G^*(z) &= G(z) \cdot H_d(z) \cdot H_c(z) \end{aligned}$$

Ziel ist, dass das Übertragungsverhalten des Wandersehenmessverfahrens vollständig kompensiert wird und das gilt:

$$G^*(z) = G(z)$$

Aus dieser Forderung folgt:

$$\begin{aligned} H_d(z) \cdot H_c(z) &= 1 \\ \Rightarrow H_c(z) &= \frac{1}{H_d(z)} \end{aligned}$$

$H_c(z)$  muss wiederum ein stabiles LTI-System sein. Die direkte Berechnung von  $H_c(z)$  aus  $H_d(z)$  ist nur für LTI-Systeme mit bestimmten Eigenschaften möglich. Die Übertragungsfunktionen der Wandersehenmessverfahren besitzen diese Eigenschaften im Allgemeinen nicht. Für die Berechnung von  $H_c(z)$  müssen daher andere Methoden zum Einsatz kommen.

### 3.4.2 Berechnung der Impulsantwort $h_c[n]$ und der Übertragungsfunktion $H_c(z)$

Für die Berechnung des Kompensationsfilters  $h_c[n]$  wird die Impulsantwort  $h_d[n]$  mittels der komplexen z-Transformation transformiert. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt darin, dass wesentliche Eigenschaften von LTI-Systemen in der komplexen z-Ebene (Frequenzbereich) in einfacher Weise darstellbar sind.

$$h_d[n] \xrightarrow{z} H_d(z)$$

**Formel 13: z-Transformation von  $h_d[n]$**

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der z-Transformation und der Verwendung bekannter z-Transformationspaare kann die Übertragungsfunktion  $H_d(z)$  direkt aus  $h_d[n]$ , siehe Formel 7, bestimmt werden.

$$h_d[n] = \delta[n] - \frac{a}{a+b} \delta[n-b] - \frac{b}{a+b} \delta[n+a]$$

**Formel 7: Diskrete Impulsantwort  $h_d[n]$  des Wandersehenmessverfahrens**

$$\begin{aligned} \delta[n] &\xrightarrow{z} 1 \\ \delta[n-b] &\xrightarrow{z} z^{-b} \\ \delta[n+a] &\xrightarrow{z} z^a \end{aligned}$$

**Formel 14: z-Transformationspaare für  $h_d[n]$**

$$H_d(z) = 1 - \frac{a}{a+b} z^{-b} - \frac{b}{a+b} z^a$$

**Formel 15: Diskrete Übertragungsfunktion  $H_d(z)$**

Durch algebraische Umformung lässt sich Formel 15 als Bruch zweier Polynome darstellen:

$$H_d(z) = \frac{(a+b) - a \cdot z^{-b} - b \cdot z^a}{a+b} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

**Formel 16: Diskrete Übertragungsfunktion  $H_d(z)$  als Bruch zweier Polynome**

Für das Zählerpolynom  $Z(z)$  sowie das Nennerpolynom  $N(z)$  lassen sich die Nullstellen berechnen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra und dem Faktorisierungssatz können für jedes beliebige Polynom mit reellen Koeffizienten die reellen und konjugiert komplexen Nullstellen bestimmt werden.

Für das Zählerpolynom  $Z(z)$  der Übertragungsfunktion  $H_d(z)$  ergeben sich, neben einem konstanten Faktor  $c_1$  die Nullstellen  $n_1$  bis  $n_n$  mit ihrer entsprechenden Vielfachheit  $l$ . Für das Nennerpolynom  $N(z)$  ergeben sich, neben dem konstanten Faktor  $c_2$  die Nullstellen  $p_1$  bis  $p_k$  mit ihrer jeweiligen Vielfachheit  $k$ . Die Faktorisierung der beiden Polynome  $Z(z)$  und  $N(z)$  sind in Formel 17 gegeben.

$$Z(z) = c_1 \cdot (z - n_1)^{l_1} \cdot (z - n_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (z - n_n)^{l_n}$$

$$N(z) = c_2 \cdot (z - p_1)^{k_1} \cdot (z - p_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - p_p)^{k_p}$$

**Formel 17: Faktorisierung von  $Z(z)$  und  $N(z)$**

Anhand der Lage der Nullstellen in der komplexen  $z$ -Ebene lassen sich wesentliche Eigenschaften von  $H_d(z)$  ablesen.

Im Allgemeinen gilt:

- Die Nullstellen von  $H_d(z)$  sind die Nullstellen von  $Z(z)$
- Die Pole von  $H_d(z)$  sind die Nullstellen von  $N(z)$
- Damit das LTI-System  $H_d(z)$  kausal und stabil ist; müssen alle Pole von  $H_d(z)$  im Inneren des Einheitskreises in der komplexen  $z$ -Ebene liegen
- Soll das LTI-System auch invertierbar sein, so müssen auch die Nullstellen von  $H_d(z)$  im Inneren des Einheitskreises liegen
- Liegen alle Pol- und Nullstellen von  $H_d(z)$  im Inneren des Einheitskreises in der komplexen  $z$ -Ebene nennt man  $H_d(z)$  minimalphasig

Die inverse Übertragungsfunktionen  $H_c(z)$  minimalphasiger Systeme kann wie folgt angegeben werden:

$$H_c(z) = H_d^{-1}(z) = \frac{1}{H_d(z)} = \frac{N(z)}{Z(z)}$$

**Formel 18: Inverse Übertragungsfunktion  $H_c(z)$  des minimalphasigen LTI-Systems  $H_d(z)$**

In der Abbildung 17 sind die Pole, als ‚x‘ gekennzeichnet, und die Nullstellen, als ‚o‘ gekennzeichnet, von  $H_d(z)$  entsprechend der Formel 17 in der komplexen  $z$ -Ebene eingezeichnet. Die Sehne ist 8,6 m lang und die Sehnenteilung beträgt 2,6 m / 6,0 m. Da Nullstellen von  $H_d(z)$  außerhalb des Einheitskreises liegen ist dieses LTI-System nicht minimalphasig. Die Nullstellen treten immer konjugiert komplex auf, mit Ausnahme der

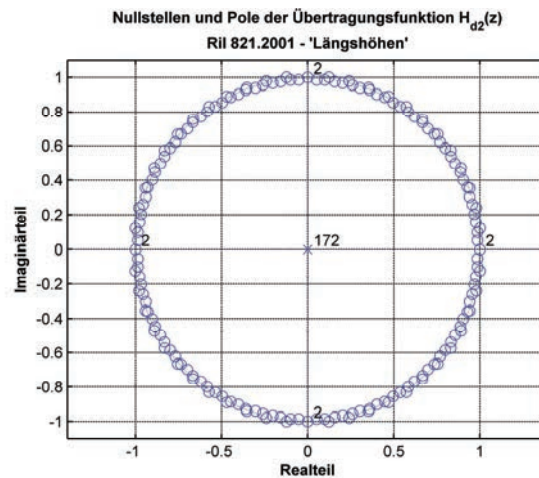


Abbildung 37: Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ – Pole und Nullstellen

Bei der Berechnung der Systemfunktion  $H_{1,2}(z)$  für die direkte Umrechnung der Wandersehenmesssignale des Handmesssystems ‚Krabbe‘ in die Wandersehenmesssignale entsprechend der Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ kann die Nullstelle bei  $z = 1$  gekürzt werden, da diese Nullstelle der Systemfunktion  $H_{d1}(z)$  und zugleich der Systemfunktion  $H_{d2}(z)$  ist. In Abbildung 38 sind die Nullstellen und die Pole der Systemfunktion  $H_{1,2}(z)$  dargestellt. Die Systemfunktion  $H_{1,2}(z)$  besitzt keine Nullstelle und keine Polstelle bei  $z = 1$ . Die Pole von  $H_{1,2}(z)$  sind die Nullstellen von  $H_{d1}(z)$  (siehe Abbildung 35). Alle Pole der Systemfunktion  $H_{1,2}(z)$ , die außerhalb des Einheitskreises liegen, wurden am Einheitskreis gespiegelt. Da bei der Systemfunktion  $H_{1,2}(z)$  alle Pole im Inneren des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene liegen ist  $H_{1,2}(z)$  stabil.

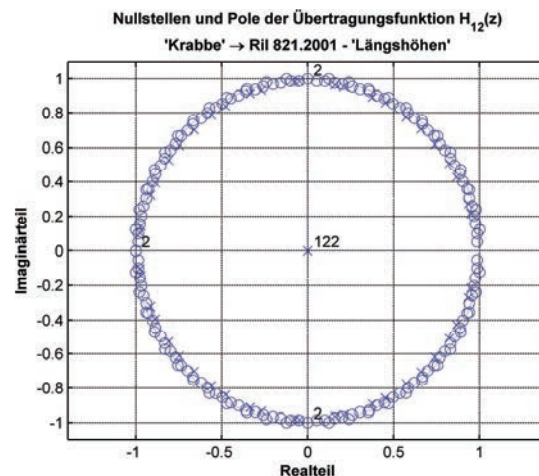


Abbildung 38: ‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘ – Pole und Nullstellen

Der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{1,2}(z)$  ist in Abbildung 39 dargestellt.

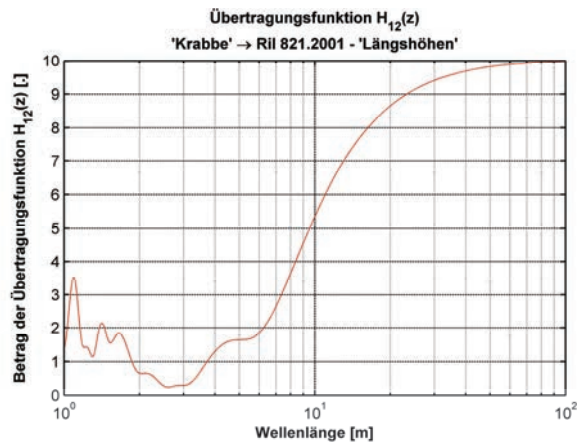


Abbildung 39: ‚Krabbe‘ → Ril 821.2001 ‚Längshöhe‘ – Betrag der Übertragungsfunktion

In Abbildung 40 sind die Beträge der Übertragungsfunktionen  $H_{d1}(z)$ ,  $H_{d2}(z)$  und  $H_{1,2}(z)$  für Wellenlängen von 1,0 m bis 100,0 m dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass sich der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{d2}(z)$ , blau dargestellt, aus der Multiplikation der Beträge der Übertragungsfunktionen von  $H_{d1}(z)$  (schwarz) und  $H_{1,2}(z)$  (rot) ergibt.

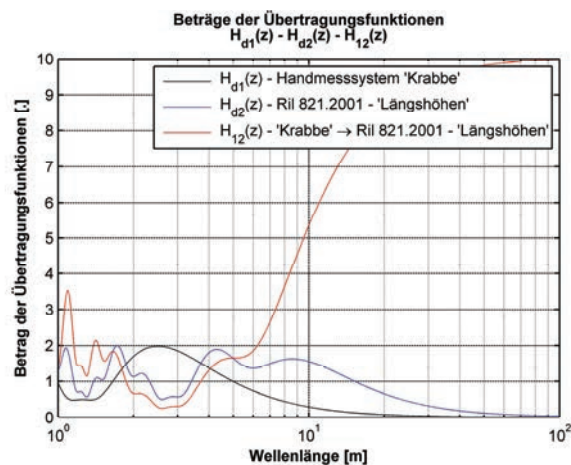


Abbildung 40:  $H_{d1}(z)$ ,  $H_{d2}(z)$  und  $H_{1,2}(z)$  – Beträge der Übertragungsfunktionen

In Abbildung 40 fällt auf, dass der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{1,2}(z)$  gegen einen konstanten Wert strebt. Dies bedeutet, dass Längshöhen für lange Wellenlängen nur endlich verstärkt werden. Im Gegensatz hierzu mussten bei der Berechnung der inversen Übertragungsfunktionen die Nullstellen in das Innere des Einheitskreises in der komplexen  $z$ -Ebene verschoben werden, um die Verstärkung für diese Wellenlängen zu begrenzen.

Dass der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{1,2}(z)$  für lange Wellenlängen ( $\omega = 0$ ) tatsächlich gegen einen konstanten Wert strebt, kann mit Hilfe der Formel 37 gezeigt werden.

Laut der Definition der  $z$ -Transformation ist

$$z = e^{j\omega T_a} = \cos(\omega T_a) + j \sin(\omega T_a)$$

wobei  $T_a$  die Abtastzeit ist. Bei ortsdiskreten Signalen ist  $T_a$  durch  $\Delta x$  zu ersetzen.

Für  $\omega = 0$  ergibt sich  $z$  zu eins. Dem entsprechend muss  $H_{1,2}(z)$  für  $z = 1$  berechnet werden. Nach Formel 16 und Formel 37 kann  $H_{1,2}(z)$  wie folgt dargestellt werden:

$$H_{1,2}(z) = \frac{Z_{1,2}(z)}{N_{1,2}(z)} = \frac{H_{d2}(z)}{H_{d1}(z)} = \frac{(a_2 + b_2) - a_2 \cdot z^{-b_2} - b_2 \cdot z^{a_2}}{(a_2 + b_2)} \cdot \frac{(a_1 + b_1)}{(a_1 + b_1) - a_1 \cdot z^{-b_1} - b_1 \cdot z^{a_1}}$$

Da sich für

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_{1,2}(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} Z_{1,2}(z)}{\lim_{z \rightarrow 1} N_{1,2}(z)} = \frac{0}{0}$$

ergibt, muss die Regel nach l'Hospital zweimal angewendet werden. Der Grenzwert für  $z \rightarrow 1$  ergibt sich zu:

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_{1,2}(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} Z_{1,2}(z) \frac{d^2}{dz^2}}{\lim_{z \rightarrow 1} N_{1,2}(z) \frac{d^2}{dz^2}} = \frac{(a_1 + b_1) \cdot (-a_2 \cdot b_2^2 - a_2^2 \cdot b_2)}{(a_2 + b_2) \cdot (-a_1 \cdot b_1^2 - a_1^2 \cdot b_1)}$$

**Formel 39: Grenzwert von  $H_{1,2}(z)$  für  $z \rightarrow 1$**

Werden in Formel 39 die Sehnenteilungen  $a_1$  und  $b_1$  des Handmesssystems ‚Krabbe‘ sowie die Sehnenteilungen  $a_2$  und  $b_2$  für die Erfassung der Längshöhen nach Ril 821.2001 eingesetzt, kann der Grenzwert für  $z \rightarrow 1$  berechnet werden.

Handmesssystem ‚Krabbe‘:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,15m \\ b_1 &= 1,35m \end{aligned}$$

Ril 821.2001 ‚Längshöhen‘

$$\begin{aligned} a_2 &= 2,60m \\ b_2 &= 6,00m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} H_{1,2}(z) = 10,0483$$

Der Grenzwert für  $z \rightarrow 1$  ergibt sich also zu 10,0483. In der Abbildung 39 und der Abbildung 40, jeweils rote Kurve, kann der Grenzwert ebenfalls abgelesen werden.

In Abbildung 41 ist die Anwendung der direkten, exakten Umrechnung für Wandersehnenmesssignale beispielhaft dargestellt. Eine reale, formtreue Gleisgeometrie in vertikaler Richtung (Längshöhen) wurde mit dem Handmesssystem ‚Krabbe‘ erfasst. Das Messsignal des Handmesssystems ist schwarz dargestellt. Blau dargestellt sind die Längshöhen entsprechend der Ril 821.2001 ‚Prüfung der Gleisgeometrie mit Gleismessfahrzeugen‘. Das Messsignal des Handmesssystems wurde in das Messsignal entsprechend der Ril 821.2001 umgerechnet. In Abbildung 41 sind die berechneten Längshöhen rot dargestellt. Zwischen der blauen und der roten Kurve gibt es keinen Unterschied. Somit belegt dieses Beispiel, dass eine direkte, exakte Umrechnung von Wandersehnenmesssignalen möglich ist.

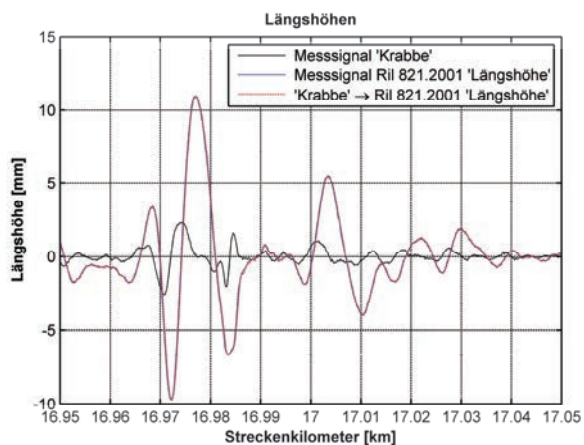


Abbildung 41: Beispiel für die Umrechnung – Längshöhen

Bei der Erfassung der Pfeilhöhen verwendet das Handmesssystem ‚Krabbe‘ die gleiche Sehnenlänge und die gleichen Sehnenteilungen wie für die Erfassung der Längshöhen. Der Betrag der Übertragungsfunktion sowie die Nullstellen und Pole in der komplexen  $z$ -Ebene für die Systemfunktion  $H_{d1}(z)$  sind bereits in der Abbildung 34 und der Abbildung 35 dargestellt.

Für die Erfassung der Pfeilhöhen wird nach Ril 821.2001 ‚Prüfung der Gleisgeometrie mit Gleismessfahrzeugen‘ eine Sehne mit einer Länge von 10,0 m und einer Sehnenteilung von 4,0 m / 6,0 m verwendet. Da der größte gemeinsame Teiler von vier und sechs gleich zwei ist, wird der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{d2}(z)$  für Wellenlängen von 2,0 m null. In Abbildung 42 ist der Betrag der Übertragungsfunktion dargestellt.

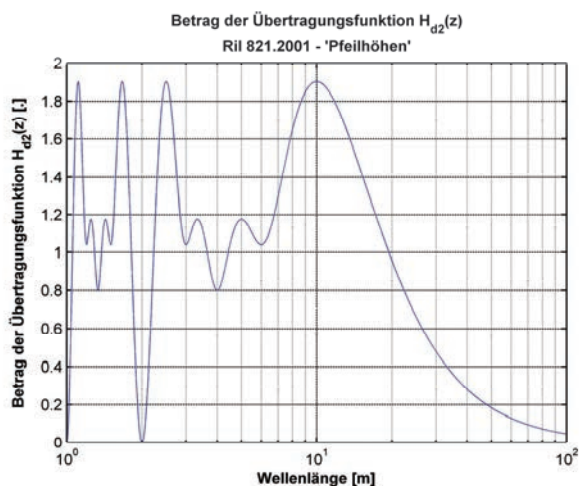


Abbildung 42: Ril 821.2001 ‚Pfeilhöhe‘ – Betrag der Übertragungsfunktion

Der Betrag der Übertragungsfunktion von  $H_{d2}(z)$  wird für Wellenlängen von 2,0 m, 1,0 m, 0,5 m, 0,25 m, 0,125 m, 0,0625 m usw. null. Die Nullstellen im Betrag der Übertragungsfunktion sind jene Stellen, an denen in der komplexen  $z$ -Ebene die Nullstellen der Systemfunktion  $H_{d2}(z)$  auf dem Einheitskreis liegen. Die Nullstellen und Pole der Systemfunktion  $H_{d2}(z)$  sind in Abbildung 43 dargestellt.